

**Муниципальный этап  
Всероссийской олимпиады школьников  
по математике  
в 2025 – 2026 учебном году**

**Ответы и решения**

**Общие положения**

- 1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.
- 2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.
- 3) В таблице критериев по каждой задаче баллы не суммируются, то есть при применении критерия на большее количество баллов критерии на меньшее число баллов не дают вклада в результат.
- 4) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.
- 5) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставяемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставяет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.
- 6) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные опiski в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.
- 7) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.
- 8) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказа-

тельств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

9) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

10) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +79220350324).

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады  
школьников по математике  
в 2025 – 2026 учебном году  
9 класс**

*Время выполнения заданий — 3 часа 55 минут*

**9.1.** На доске записано число 20. Каждую минуту с числом, записанным на доске, проделывают одну из четырёх операций: число либо умножают на 2, либо делят на 2, либо умножают на 5, либо делят на 5. Результат операции выписывают на доску, а предыдущее число стирают. Докажите, что число, которое будет написано на доске ровно через час, не будет равно 250.

**Решение:**

Способ 1.  $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$ . Каждую минуту в это выражение либо добавляется один из множителей 2 или 5, либо из него убирается один такой множитель (если в какой-то момент возникает дробное число, считаем, что множители, стоящие в знаменателе, находятся в отрицательном количестве, то есть, например, в числе  $\frac{5}{4}$  один множитель 5 и минус два множителя 2). Значит, за чётное число минут чётность общего числа множителей не изменится, поэтому через 60 минут в числе будет по-прежнему нечётное количество простых множителей, в то время, как число  $250 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$  состоит из четырёх таких множителей.

Способ 2. Предположим противное, и пусть всего было  $x$  умножений на 2,  $y$  умножений на 5,  $z$  делений на 2 и  $t$  делений на 5. Всего было сделано 60 операций, а в итоге получилось число  $20 \cdot \frac{2^x}{2^z} \cdot \frac{5^y}{5^t}$ . Тогда имеем систему

$$\begin{cases} x + y + z + t = 60, \\ 20 \cdot \frac{2^x}{2^z} \cdot \frac{5^y}{5^t} = 250. \end{cases}$$

Второе уравнение системы приводится к виду  $2^{x+1} \cdot 5^y = 2^z \cdot 5^{t+2}$ . Отсюда (так как разложение любого числа на простые множители единственно) следует, что  $x + 1 = z$ , а  $y = t + 2$ . Подставив эти значения в первое уравнение системы, получим  $2x + 2t + 3 = 60$ , откуда  $x + t = \frac{57}{2}$  — число не целое. Противоречие.

| Есть в работе                                                                     | Баллы    |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Верное доказательство                                                             | 7 баллов |
| Условие задачи верно записано в виде уравнения (системы уравнений) в целых числах | 3 балла  |
| Замечено, что причина невозможности в чётности общего количества операций         | 2 балла  |
| Доказываемое утверждение проиллюстрировано конкретными примерами                  | 0 баллов |

**9.2.** Для квадратного трёхчлена  $p(x) = x^2 + ax + b$  с целыми коэффициентами  $a$  и  $b$  при любом действительном значении  $x$  выполнено неравенство  $p(x) \geq -0,9$ . Докажите, что при любом действительном значении  $x$  выполнено и более сильное неравенство  $p(x) \geq -0,25$ .

**Решение:**

Способ 1. Условие на квадратный трёхчлен означает, что дискриминант трёхчлена  $p(x) = x^2 + ax + b + 0,9$ , равный  $a^2 - 4b - 3,6$ , неположителен. А доказать требуется неположительность дискриминанта трёхчлена  $p(x) = x^2 + ax + b + 0,25$ , то есть неравенство  $a^2 - 4b - 1 \leq 0$ . Число  $a^2 - 4b$  — целое, и при делении на 4 в остатке даёт либо 0, либо 1 (в зависимости от чётности числа  $a$ ). Оно не больше 3,6, поэтому оно не больше 1, что и требовалось доказать.

Способ 2. Наименьшее значение квадратного трёхчлена с положительным старшим коэффициентом достигается в вершине параболы, то есть в точке с абсциссой  $-\frac{a}{2}$ . Возможны два случая.

1) Число  $a$  чётное. Тогда вершина параболы лежит в целочисленной точке, и значение трёхчлена в этой точке также является целым числом. Так как оно не меньше числа  $-0,9$ , то оно не меньше нуля. В этом случае весь трёхчлен лежит не ниже оси абсцисс, то есть значения во всех точках неотрицательны.

2) Число  $a$  нечётно. Тогда абсцисса вершины параболы — число полуцелое, и значение в этой вершине равно  $-\frac{a^2}{4} + b = n - \frac{1}{4}$ , где  $n$  — некоторое целое число. Так как это значение не меньше  $-0,9$ , число  $n$  не может быть отрицательным, поэтому значение квадратного трёхчлена в вершине (а тогда и во всех точках) не меньше  $0 - \frac{1}{4} = -0,25$ , что и требовалось доказать.

**Примечание:** Доказываемое неравенство не может быть усилено: для любого приведённого квадратного трёхчлена с дискриминантом, равным 1, (например, для  $p(x) = x^2 + x$ ) его наименьшее значение будет в точности равным  $-0,25$ .

| Есть в работе                                                                                                                                                     | Баллы    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Верное доказательство                                                                                                                                             | 7 баллов |
| Верно рассмотрен только случай чётного числа $a$                                                                                                                  | 3 балла  |
| Объяснено, что достаточно рассматривать значение $p(x)$ только в точке $x_0 = -a/2$ ИЛИ условие верно сведено к анализу дискриминантов двух квадратных трёхчленов | 2 балла  |
| Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи, а также иллюстрация условия конкретными примерами                                                      | 0 баллов |

**9.3.** Незнайка последовательно измерил расстояния от некоторой точки  $P$  внутри квадрата  $ABCD$  до четырёх его вершин и получил числа 1 см, 4 см, 8 см, 7 см. Докажите, что Незнайка ошибся.

**Решение:** Без ограничения общности пусть ближайшая к точке вершина квадрата левая верхняя. Тогда самая далёкая от неё — правая нижняя. Также можно считать, что правая верхняя ближе левой нижней. Пусть расстояния от точки до левой, верхней, правой и нижней сторон квадрата равны  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  см. По теореме Пифагора  $a^2 + b^2 = 1$ ,  $c^2 + d^2 = 64$ ,  $a^2 + d^2 = 49$  и  $b^2 + c^2 = 16$ . Из четырёх уравнений одно является следствием трёх других, а из остальных получаем  $b = \sqrt{1 - a^2}$ ,  $d = \sqrt{49 - a^2}$ ,  $c = \sqrt{15 + a^2}$ . Так как  $a + c = b + d$  (это длина стороны квадрата), отсюда имеем

$$a + \sqrt{15 + a^2} = \sqrt{1 - a^2} + \sqrt{49 - a^2}.$$

Число  $a \leq 1$ , так как расстояние от точки до стороны не больше, чем расстояние от неё до вершины, лежащей на этой стороне. Но тогда левая часть меньше  $1 + \sqrt{16} = 5$ , а правая часть больше  $\sqrt{48}$ , что больше 5. Равенство невозможно, значит, Незнайка ошибся.

| Есть в работе                                                                                           | Баллы    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Верное доказательство                                                                                   | 7 баллов |
| Получено, но не решено уравнение от одной переменной, верно описывающее полученные Незнайкой результаты | 4 балла  |
| Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи                                               | 0 баллов |

**9.4.** В школе прошёл однокруговой шахматный турнир (каждый участник сыграл с каждым ровно один раз). В нём участвовали и мальчики, и девочки, причём девочек было в 3 раза больше. За выигрыш давалось одно очко, за ничью —

пол-очка, за поражение – 0 очков. После окончания соревнований оказалось, что девочки в сумме набрали на 20% очков больше, чем мальчики. Какое минимальное количество школьников могло участвовать в турнире?

**Решение:** Чтобы не возиться с дробями, будем считать, что за победу давалось два очка, а за ничью — одно. Условие задачи при этом не изменится.

Пусть мальчики в сумме набрали  $a$  очков, тогда девочки набрали  $1,2a$  очков, а доля очков, набранных мальчиками, равна

$$\frac{a}{2,2a} = \frac{5}{11}.$$

Пусть, кроме того, в турнире было  $3x$  девочек и  $x$  мальчиков. Тогда общее количество партий турнира (оно вдвое меньше общего количества набранных очков) равно

$$\frac{4x(4x-1)}{2} = 2x(4x-1).$$

Следовательно, мальчики набрали

$$\frac{5}{11} \cdot 2 \cdot 2x(4x-1) = \frac{20x(4x-1)}{11}$$

очков. Это число целое, поэтому число  $x(4x-1)$  обязано делиться на 11. Наименьшее натуральное  $x$  с таким свойством — число 3.

Приведём пример турнира при  $x = 3$ . Пусть в турнире было 3 мальчика и 9 девочек. Мальчики выиграли все партии у девочек (27 партий) и набрали в партиях с девочками 54 очка. Ещё 6 очков они набрали в поединках между собой. В сумме мальчиками набрано 60 очков. Девочки набирали очки только в партиях между собой  $((9 \cdot 8)/2 = 36$  партий) и набрали 72 очка, что на 12 очков (или на 20%) больше, чем мальчики.

**Примечание:** Не очень сложно доказывается, что пример турнира, удовлетворяющего условию задачи, единственен: при  $x > 3$  количество очков, набранных девочками в партиях между собой, превышает  $6/11$  от общего количества разыгрываемых очков.

**Ответ:** 12 школьников.

Рекомендации по проверке:

| Есть в работе                                                                                                                                                                      | Баллы    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Верный обоснованный ответ                                                                                                                                                          | 7 баллов |
| Приведён пример турнира, удовлетворяющего условию                                                                                                                                  | 4 балла  |
| Доказано, что ситуация невозможна, если число мальчиков меньше трёх И/ИЛИ установлено какое-либо ограничение сверху на количество участников турнира (достаточно только мальчиков) | 2 балла  |
| Верный ответ без обоснования ИЛИ доказательство невозможности ситуации, когда мальчик один                                                                                         | 1 балл   |
| Замечание, что количество участников турнира кратно 4, а также любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи                                                           | 0 баллов |

**9.5.** Для какого наибольшего натурального числа  $n$  существует единственное натуральное число  $k$ , удовлетворяющее неравенству

$$\frac{5}{6} < \frac{k}{n} < \frac{6}{7} ?$$

Ответ обоснуйте.

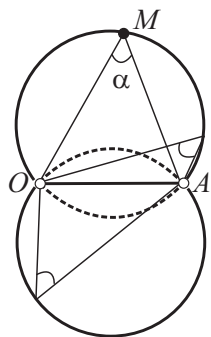
**Решение:** Так как  $\frac{5}{6} = \frac{70}{84}$ ,  $\frac{6}{7} = \frac{72}{84}$ , то при  $n = 84$  единственное число  $k$ , удовлетворяющее неравенству, это  $k = 71$ . При  $n > 84$  на интервал  $\left(\frac{5}{6}; \frac{6}{7}\right)$  длины  $\frac{1}{42}$  целиком помещаются два отрезка длины  $\frac{1}{n}$ , поэтому если число  $\frac{k-1}{n}$  — наибольшее число указанного вида, которое не больше  $\frac{5}{6}$ , то и число  $\frac{k}{n}$ , и число  $\frac{k+1}{n}$  лежат в указанном интервале, значит, есть не менее двух чисел  $k$  удовлетворяющих неравенству из условия.

**Ответ:** 84.

Рекомендации по проверке:

| Есть в работе                                                                                  | Баллы    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Верный обоснованный ответ                                                                      | 7 баллов |
| Доказано что при $n > 84$ существует более одного $k$ , удовлетворяющих неравенству из условия | 4 балла  |
| Доказано, что $n = 84$ удовлетворяет условию задачи                                            | 3 балла  |
| Верный ответ без обоснования                                                                   | 1 балл   |
| Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению                                             | 0 баллов |

**9.6.** На разных сторонах прямого угла с вершиной  $O$  отметили точки  $A$  и  $B$  так, что  $AO = OB$ . Найдите геометрическое место точек, лежащих внутри угла  $AOB$  и таких, из которых отрезки  $OA$  и  $OB$  видны под одинаковыми углами.



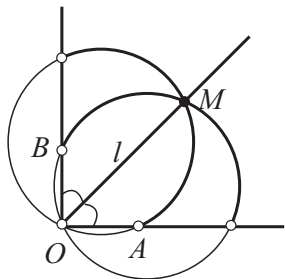
К решению задачи 9.6, ГМТ, откуда отрезок виден под заданным углом

**Решение:** Пусть точка  $M$  принадлежит требуемому ГМТ. Тогда  $\angle AMO = \angle BMO = \alpha$ . Рассмотрим четырёхугольник (возможно, невыпуклый)  $AMBO$ . Сумма его углов равна  $360^\circ$ ,  $\angle O = 90^\circ$ ,  $\angle M = 2\alpha$ . Отсюда  $\alpha < 135^\circ$ .

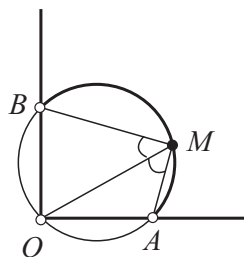
Геометрическим местом точек, из которых отрезок  $AO$  виден под углом  $\alpha$ , является объединение двух равных дуг (без концов) окружностей — см. рисунок. Точка  $M$  находится на той дуге, которая лежит в полуплоскости с границей  $OA$ , содержащей точку  $B$ . Аналогично, точка  $M$  лежит на дуге окружности, из которой отрезок  $OB$  виден под тем же углом  $\alpha$  и которая лежит в полуплоскости с границей  $OB$ , содержащей точку  $A$ .

Рассмотрим окружности, содержащие эти дуги. Возможно два случая.

1) Окружности различны. Тогда они симметричны относительно прямой  $l$  — биссектрисы угла  $AOB$  и имеют общую точку  $O$ . Вторая точка их пересечения также лежит на  $l$ . Следовательно,  $M$  лежит на биссектрисе угла  $AOB$  (см. рисунок слева). Отметим, что все точки биссектрисы входят в ГМТ: если  $M \in l$ , то треугольники  $MOA$  и  $MOB$  равны по двум сторонам и углу между ними.



К решению задачи 9.6, случай 1

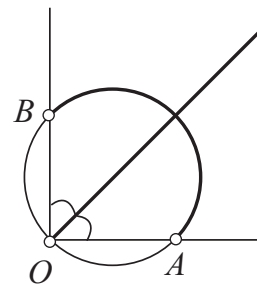


К решению задачи 9.6, случай 2

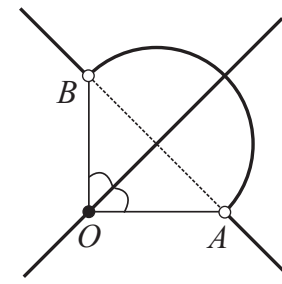
2) Окружности совпадают. Тогда эта общая окружность описана около треугольника  $AOB$ . Интересующие нас дуги имеют общую часть — дугу  $AB$ . Значит, точка  $M$  лежит на этой дуге. (см. рисунок справа). Все точки дуги (исключая их концы) входят в указанное множество: дуги  $OA$  и  $OB$  равны, так как стягиваются равными хордами, значит, для любой точки  $M$  дуги  $AB$  выполнено равенство  $\angle AMO = \angle BMO$ .

Мы доказали, что искомым геометрическим местом точек является объединение биссектрисы угла  $AOB$  и лежащей внутри угла дуги окружности, описанной около треугольника  $AOB$  — см. рисунок ниже слева. Это ответ.

**Ответ:**



Ответ к задаче 9.6



К примечанию к задаче 9.6

**Примечание:** Не очень сложно найти ГМТ всех точек плоскости, не обязательно лежащими внутри угла  $AOB$ , из которых отрезки  $AO$  и  $OB$  видны под равными углами. В этом случае множество будет иметь вид, изображённый на рисунке выше справа.

Рекомендации по проверке:

| Есть в работе                                                                                                                                                       | Баллы              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| Верный обоснованный ответ                                                                                                                                           | 7 баллов           |
| Верно найдено требуемое ГМТ всех точек плоскости (не только лежащих внутри угла $AOB$ )                                                                             | баллы не снижаются |
| Обосновано, что искомое ГМТ лежит в объединении биссектрисы угла $AOB$ и окружности с диаметром $AB$ и доказан хотя бы один из фактов а) или б) критерия на 4 балла | 6 баллов           |
| Обосновано, что искомое ГМТ лежит в объединении биссектрисы угла $AOB$ и окружности с диаметром $AB$                                                                | 5 баллов           |
| Доказано два факта:<br>а) точки биссектрисы угла входят в нужное ГМТ<br>б) точки полуокружности с диаметром $AB$ входят в нужное ГМТ                                | 4 балла            |
| Доказан факт б) из критерия на 4 балла                                                                                                                              | 3 балла            |
| Доказан факт а) из критерия на 4 балла                                                                                                                              | 1 балл             |
| Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи                                                                                                           | 0 баллов           |